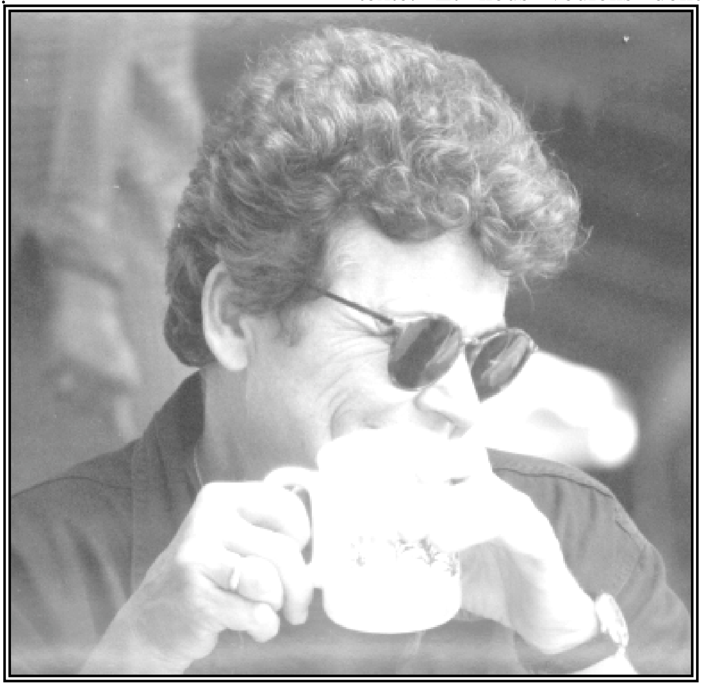
Derrière la droite, l'hyperplan

Maryse Maurel

I. Introduction

Depuis longtemps, nous travaillons à Nice sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous avons cherché à élaborer des cadres théoriques pour observer et interpréter les phénomènes d'enseignement que nous rencontrions dans nos classes. Notre but est de comprendre d'une part, d'intervenir d'autre part.



Nous avons d'abord regardé l'enseign ement de l'algèbre élémentaire au collège et en Seconde, la construction et l'évolu tion des connais sances chez un sujet (connaissances loca les, orientation de tra vail), d'où aide individuelle au moyen d'entretiens (explicita tion, Faire Faux)[10]. Mais ce que nous avons construit et appris, au cours de ces recherches et de leur mise en application dans nos classes, nous a amenés à l'idée qu'il faut faire travailler les élèves d'une façon particulière, qu'il faut le faire dans la classe et sous la direction du maître. Notre recherche nous a conduits vers des lectures dans le champ de la philosophie des mathématiques (Wittgenstein[11], Bouveresse[12], Cavaillès[13], Ricœur[14], Desanti[15], Husserl[16], et certainement d'autres que j'oublie, mais rassurez-vous, nous sommes plusieurs à lire !) et à une réflexion sur ce qui caractérise l'activité mathématique.

A partir de ce travail, nous posons une hypothèse : quand nous enseignons des mathématiques, nous enseignons plus que le texte. Et nous voulons donc répondre aux questions sui vantes : Qu'y a-t-il dans les mathématique s à savoir, à apprendre, à transmettre de plus que ce qui est écrit dans les livres, les poly copiés ou le discours ma gistral (qui, selon Robert Misrahi, a un statut très voisin de celui de l'écrit) ? Et comment se modifie l'acte d'enseigneme nt quand on prend cela en compte, et quand on prend en compte que cela ne peut pas s'enseigner directement, mais à travers l'activité des élèves ? Que faut-il donc institutionnaliser en classe en plus du texte écrit ?

Dans ce texte je distinguerai la connaissance subjective construite par un sujet (objet d'étude en psychologie que je nommerai *connaissance locale* ou *connaissance*) de la *connaissance mathématique* (ou *objet de savoir* mathématique).

II. Les mathématiques

Le contenu de ce § a déjà fait l'objet d'un exposé à la *CI2U* (Commission Inter IREM

---

[10] GECO. (1997), *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? REPÈRES-IREM numéro 28,* Topiques.
[11] Vagabondage dans son œuvre
[12] BOUVERESSE J. (1987), *La force de la règle. Wittgenstein et l'invention de la nécessité,* Minuit, collection "Critique".
[13] CAVAILLÈS PUF + LTS
[14] RICŒUR Temps et récit tome 1
[15] DESANTI Les idéalités mathématiques et article Ellipses
[16] OG et RL + Dastur + Salanskis + des bouts

Université) le 14 novembre 1998 et à *SFIDA 11*, (Séminaire Franco Italien de Didactique de l'Algèbre) le 20 Novembre 1998. Il sera publié dans les prochains Actes SFIDA par l'IREM de Nice.

II.1. Notre but

Nous ne cherchons pas ici à définir ce que sont les mathématiques (Cavaillès dit que c'est impossible). Nous nous intéressons à l'activité mathématique. Pour nous, apprendre des mathématiques, c'est interagir (→ **Construction** et **Expérience** + réflexivité) avec des objets mathématiques (la réalité mathématique) (→ la discipline et la Savoir = **les Mathématiques**), au sein d'une classe ou d'un groupe (→ **Autrui**), dans un cadre institutionnel d'**Enseignement**, sous la direction d'un maître (→ institutionnalisation du savoir). C'est pour cela que nous avons nommé CESAME notre groupe de recherche.

Nous cherchons seulement à pointer des caractéristiques de cette activité. Quand pouvons-nous dire que l'activité de quelqu'un est sans aucun doute une activité mathématique et donc qu'ainsi faisant, il prend le risque d'apprendre des mathématiques ?

II.2. Quand on enseigne des mathématiques, on enseigne plus que le texte

Dans *Le plaisir du sens*[17], Bernard Charlot écrit (L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques) :

Faire des maths, c'est un travail de la pensée, qui construit de nouveaux concepts pour résoudre des problèmes, qui pose de nouveaux problèmes à partir des concepts ainsi construits, etc.

Pour un platonicien, *le mathématicien dévoile des vérités et l'enseignant doit tourner l'œil de l'âme de l'élève vers ces vérités. Dès lors, ce que l'enseignant retient de l'activité du mathématicien, ce n'est pas cette activité elle-même, ..., ce sont les résultats de cette activité, théorèmes, démonstrations, définitions, axiomes.* (Il nous semble que l'on a ici une bonne énumération de ce qui est écrit dans un ouvrage de mathématiques).

Nous préférons choisir un mode d'enseignement qui conçoive *les mathématiques ... comme une activité qui engendre ses résultats selon certaines règles, vérifiables par tous.*

Toujours dans *Le plaisir du sens*, dans un texte de Nicolas Rouche (Formation des concepts et construction du savoir) à propos des travaux du GEM (Louvain la Neuve), nous trouvons :

Franchir un seuil épistémologique en travaillant sur des problèmes, c'est faire des mathématiques assez profondément pour que, par-delà l'acquisition théorique immédiate, il reste une expérience de cette pratique. Parce qu'elle est réinvestissable dans des activités mathématiques ultérieures, éventuellement tout autre, cette expérience contribue à la capacité générale de faire des mathématiques.

Et plus loin :

Ce qui rassemble ces acquis méthodologiques, c'est qu'ils se situent au-delà de la théorie particulière visée par une suite de problèmes. Ils sont ce qu'il y a de plus important dans la formation mathématique. Bien entendu, les élèves ne les perçoivent pas habituellement du premier coup, ni de façon claire. Il faut les aider à en prendre conscience, à les expliciter.

Dans le même ouvrage, Rudolf Bkouche (Axiomatique, formalisme, théorie) écrit aussi :

Algébrisation et formalisation apparaissent ainsi comme l'élimination du sens, l'élimination du contenu au profit exclusif de la forme ... Mais cette élimination du sens n'a de sens que parce qu'elle intervient comme méthode (et c'est parce qu'elle intervient comme méthode qu'elle devient plus que méthode, qu'elle fonde un philosophie, voire une idéologie) ... Cette prise en compte de la signification de l'élimination du sens est essentielle si l'on veut comprendre la place de l'algébrisation et de la formalisation dans l'activité mathématique (et plus généralement scientifique), en particulier en ce qui concerne l'enseignement.

La science ... est organisation de connaissances et ... elle doit définir les principes de cette organisation.

Donc, à partir de notre réflexion personnelle de didacticiens, à partir de lectures de textes, et à partir de notre expérience de professeurs de terrain, nous proposons l'hypothèse suivante :

Quand on enseigne des mathématiques, on enseigne **plus que le texte des mathématiques**. Nous allons définir l'une des facettes de ce **plus** et en proposer une utilisation didactique.

II.3. Une caractéristique des énoncés

mathématiques : la nécessité épistémique

Les mathématiciens connaissent bien tout ce qui suit. Pour nous, ce qui est important, c'est que les élèves le sachent aussi, et nous proposons de ramener explicitement ce travail au sein de l'institution scolaire.

La nécessité épistémique

Nous avons cherché à décrire ce **plus** des mathématiques qui n'est pas dans le texte et que nous voulons enseigner. Aujourd'hui, nous allons nous intéresser seulement à l'un de ses aspects : la *nécessité épistémique*.

[17] BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N. (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin.

Cavaillès écrit[18] :
Le développement des mathématiques est nécessaire, non en ce qu'il suit des lignes préétablies, prévisibles[19], ou obéit à un dessein, mais en ce qu'il se déploie par construction de relations entre des résultats que leur connexion rationnelle soustrait pour ainsi dire à la contingence. L'architecture (au sens de Bourbaki) élimine le contingent ...
Autonomie donc nécessité, dit Cavaillès, ce qui veut dire que la nécessité est interne aux mathématiques. Et nous retrouvons Spinoza : Est libre *"une chose qui est et agit par la seule nécessité de sa nature ; contrainte, celle qui est déterminée par une autre à exister et à agir"*.
Selon Cavaillès, les mathématiques sont donc *libres* ou *autonomes*, (pour nous, les principes sont dans les mathématiques). Elles fonctionnent sur le principe de non contradiction et sur la nécessité des énoncés. Suivre cette règle du jeu, c'est travailler avec la non contradiction, de là découle la nécessité des énoncés. C'est ce que nous appelons la *nécessité épistémique*.
D'où vient ce principe ? Nous adoptons le point de vue de Wittgenstein : nous nous le donnons comme règle du jeu (mais peu importe d'où il vient, puisqu'il amène tous les mathématiciens à se mettre d'accord sur les mêmes résultats, qu'il vienne de Dieu (Kronecker), de la caverne (Platon), de l'équipement interne de mon cerveau (Poincaré) ou de ma propre décision (Wittgenstein).
Remarque : quand nous parlons de *jeu*, ce n'est pas au sens ludique, mais au sens social d'une activité humaine.
Nous retiendrons donc que les objets mathématiques sont des objets idéaux soumis à certaines règles : ils sont prévisibles, ils échappent à la contingence, et donc ils résistent.
Exemples
Ex 1 : le cube mathématique par opposition au cube matérialisé ou au cube représenté. Deux droites du cube mathématique se coupent (ou ne se coupent pas) pour tout le monde. (cf expérience débat scientifique en seconde et Troisième)
Ex 2 : faire apprendre par cœur à un élève, en algèbre, en troisième ou en seconde, que la solution de $ax=b$, pour $a \neq 0$, est $x=b/a$ lui apprend à donner la solution mais ne lui apprend rien sur la nature de ce savoir. Un apprentissage de ce type ramène l'énoncé "la solution de $ax=b$, pour $a \neq 0$, est $x=b/a$" à un énoncé factuel comme "le Mont-Blanc a une hauteur de 4807 m". Il occulte une facette fondamentale de cet énoncé qui est sa nécessité épistémique.
Nous allons nous servir de cette façon de regarder les énoncés mathématiques pour piloter l'enseignement.
Il faudra que nous cherchions à élucider comment se construit (pour le mathématicien expert ou apprenti) la nécessité épistémique d'un énoncé mathématique (celle qui est relative aux règles des mathématiques considérées comme un jeu au sens de Wittgenstein) puisqu'elle n'est pas dans l'énoncé factuel ? Est-ce à partir du contexte (pragmatique), de l'usage (cf grammaire Wittgenstein), de l'expérience personnelle du sujet (mais plus précisément où et comment ? et quel type d'expérience ?), de l'histoire de la connaissance pour ce sujet-là, de l'expérience du débat collectif en classe, de l'action performative du maître qui a institutionnalisé cette connaissance ?
Ici pour nous, l'apprentissage visé est celui de la nécessité épistémique.
L'institutionnalisation de la nécessité
Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir.
L'institutionnalisation répond aux paradoxes de l'enseignement :
- Si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir
- L'évolution n'est pas la connaissance de l'évolution
- L'institutionnalisation clarifie le savoir auquel on peut légitimement faire référence
- Avant on connaît, mais on ne sait pas (on ne sait pas qu'on sait)
- Elle modifie le contrat didactique : après, le maître peut exiger le savoir institutionnalisé
- Il y a un moment où l'élève doit rejeter le jeu pour choisir le savoir[20].

Alors, qu'est-ce-que le maître institutionnalise en situation de débat scientifique ou de problème ouvert ? Sûrement pas seulement du texte mathématique (ce qu'on encadre en rouge dans les petites classes et qu'il faut apprendre par cœur).
Exemples :
Ex 1 : Dans l'activité Circuit de Marc Legrand (débat scientifique), le maître institutionnalise la nécessité de travailler dans un modèle, et dans le même modèle pour tous, pour pouvoir se mettre

[18] SINACEUR H., (1994), *Jean Cavaillès, Philosophie mathématique*, PUF. page 32
[19] Pour Cavaillès *imprévisibilité* et *nécessité* sont les deux caractères du travail mathématique (oc, page 41).
[20] Vingt ans de didactique des mathématiques en France, *Théories des situations didactiques, naissance, développement, perspectives*, M.J. Perrin-Glorian, La Pensée sauvage, 1994

d'accord sur le vrai et le faux ; le groupe construit ainsi un espace mathématique qui va résister aux opinions des uns et des autres et qui va imposer la nécessité de ses résultats.

Ex 2 : En algèbre, il ne suffit pas d'appliquer des règles formelles (identités remarquables), il y a aussi les règles du jeu au sens de Wittgenstein (ce qui fait que c'est comme ça et pas autrement). Il faudra donc institutionnaliser la règle formelle, mais aussi ce qui donne sens à cette règle dans l'ensemble des mathématiques.

Donc, ce n'est plus la simple connaissance du texte mathématique qui doit être institutionnalisée.

D'où, l'idée de déplier le savoir mathématique que nous sommes amenés à regarder sous plusieurs aspects : en plus du niveau I (les savoirs dont l'énoncé est dans les livres), il y a un niveau II (non-contradiction et nécessité, les principes internes …), et certainement un niveau III qui concerne l'épistémologie des mathématiques (et qui pourrait être que les savoirs de niveau II sont constitutifs des mathématiques). Le travail de recherche qui concerne ce point est en cours.

N'oublions pas que la description des niveaux est du côté des mathématiques (épistémologie des mathématiques) et non du côté du sujet (psychologie ou épistémologie cognitive). Mais que nous n'excluons pas la possibilité que les élèves construisent, au cours de leur apprentissage des mathématiques des connaissances locales de niveau II en même temps que les connaissances locales de niveau I que nous commençons à bien repérées dans notre pratique enseignante.

Je fais une proposition qui n'est pas encore approuvée par mes co-chercheurs : les connaissances mathématiques, en tant qu'éléments du savoir mathématique, sont des *parties* des mathématiques, et les niveaux sont des *moments* des mathématiques[21]. Je peux séparer mentalement le théorème de Pythagore du théorème de Thalès et supprimer l'un des deux sans que l'autre cesse d'exister. ce sont des savoirs. Par contre, un niveau ne peut pas être séparé d'un savoir, il ne peut exister que comme *moment* d'une connaissance mathématique. Il ne pourra en être séparé. Il sera donc hors de question d'avoir l'idée saugrenue d'en faire un objet d'apprentissage, indépendamment d'un apprentissage de connaissances mathématiques.

(Dernière heure, je viens de m'apercevoir que ça ne marche pas comme ça, je garde l'idée et je recommence).

Quelles situations pour enseigner la nécessité épistémique ?

[21] Ces mots "moment" et "partie" sont définis par Husserl dans les RL.

Nous pensons donc qu'il est impossible d'enseigner explicitement des connaissances qui ne sont pas des connaissances de niveau I. Quels sont donc les détours à faire ? (cf paradoxes de l'enseignant). Là autant ou plus qu'ailleurs, la maître ne peut pas nommer *a priori* ces connaissances de niveau > I. (Il faudra donc fabriquer ici un fusil à tirer dans les coins). Quelle *expérience* devons-nous proposer aux élèves pour qu'ils les construisent et pour qu'ils se les approprient ? (Le lien entre les trois niveaux, autrui, le récit et l'expérience est là, dans cette impossibilité à enseigner directement cet autre aspect des mathématiques).

Il faut donc prévoir des situations a-didactiques[22] pour la nécessité.

II.4. La réalité mathématique et autrui

La réalité mathématique

Dans la perspective Piagétienne, le sujet interagit avec son environnement : la réalité. Que pourrait être alors "la réalité mathématique" à laquelle est confronté un élève ? Dans notre travail, nous avons besoin de la définition d'une réalité qui puisse jouer le rôle du monde réel auquel est confronté un enfant quand il agit. Dans une première approche, nous utiliserons l'idée de *résistance*. Dans le monde physique, les objets, un mur par exemple, résistent ; nous rencontrons tous cette résistance de la même façon, personne ne peut passer à travers un mur sans le casser. En mathématiques, c'est la même chose. Les règles du jeu, c'est-à-dire les principes qui régissent l'activité mathématique (le principe de non-contradiction par exemple) amènent les mathématiciens à se confronter à des objets mathématiques qui résistent. Ce sont les êtres mathématiques, mais aussi les relations entre eux, les structures, etc.

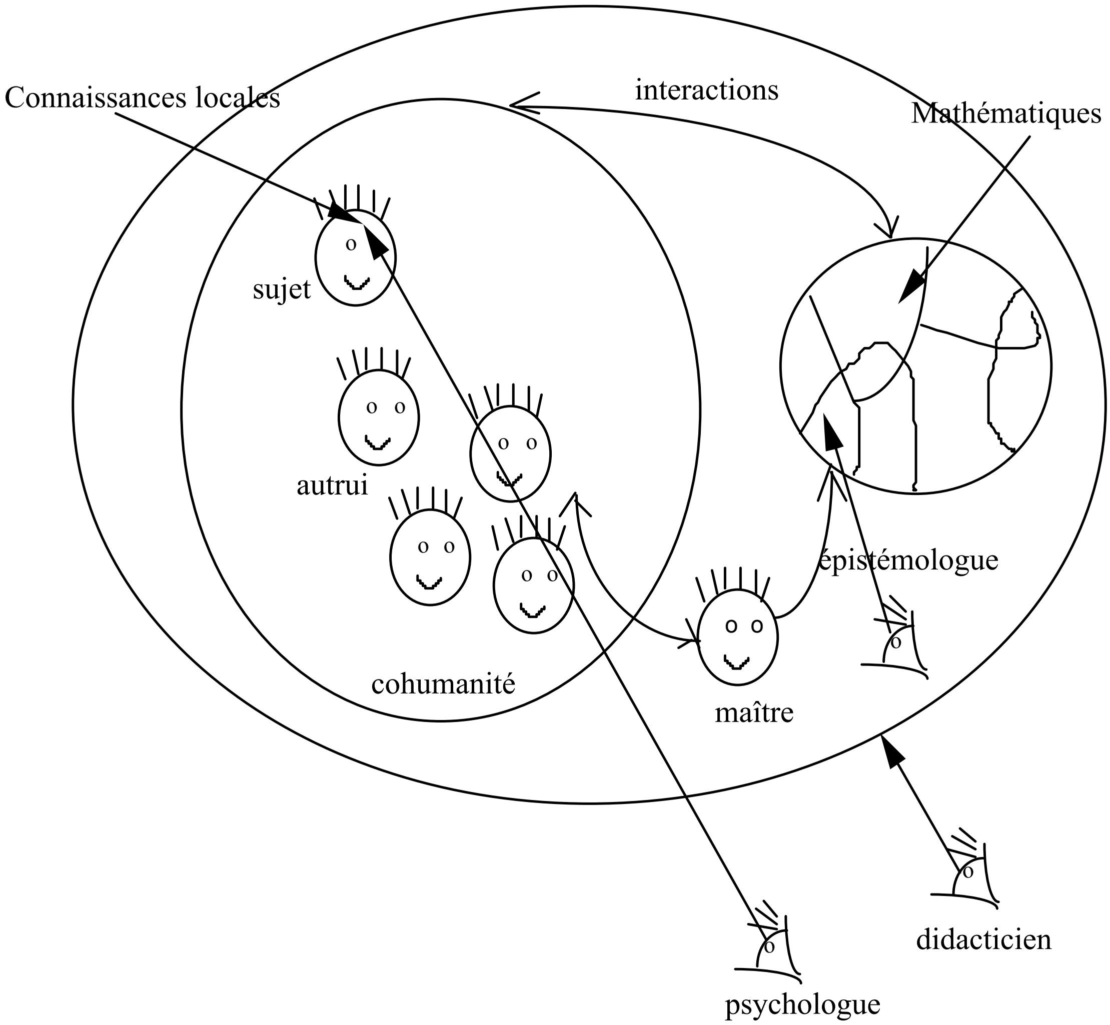
Le quotient de 5 par 3 ne sera JAMAIS un entier.

La diagonale d'un carré n'a pas de commune mesure avec le côté de ce carré, ou si vous préférez, $\sqrt{2}$ ne peut pas être le quotient de deux entiers. (Ou, comme l'a dit Denis Guedj[23] aux journées de l'Association des Professeurs de Mathématiques cette année à Rouen, la proposition "$\sqrt{2}$ est un irrationnel" ne sera jamais le résultat d'un sondage).

[22] Une situation a-didactique est une situation d'enseignement où la connaissance visée n'est pas désignée comme telle dans l'énoncé du problème, mais qui est nécessaire pour sa résolution.

[23] auteur du livre *Le théorème du perroquet*, (1998), SEUIL, dont je vous recommande vivement la lecture.

L'expérience de la nécessité se fait dans l'interaction avec l'aspect résistant des objets mathématiques.
Autrui
Nous pouvons rencontrer cette réalité en nous confrontant à autrui, dans un dialogue durant lequel nous ferons l'expérience de la contradiction.



III. L'expérimentation

Nous avons donc chercher à créer une situation où les élèves feraient l'expérience de la nécessité (situation didactique) en utilisant le levier de la confrontation (travail en groupe) et à institutionnaliser cette connaissance de Niveau II (séance de synthèse et institutionnalisation).

autrui
↓
activer la KL → erreur → confrontation et conflit → réorganisation des K
↑ ↑
nécessité →→→→

III.1. Un peu de mathématique

Vous savez tous ce qu'est une droite (au sens de ligne droite). Pour ma part, j'ai commencé à me demander comment je fais pour savoir que quelque chose est droit, le tissu que je coupe ou la planche que je scie, et vous pouvez facilement imaginer la suite. Mais ceci est une autre histoire… Savez-vous aussi ce qu'est une droite mathématique ? La fameuse droite sans épaisseur, prolongeable à l'infini, que vous avez côtoyée dans vos cours de mathématiques, celle qui est unique quand elle passe par deux points[24], la *droite*, objet idéal, résultat d'une

[24] "Par deux points distincts, il passe une droite et une seule", ne pas confondre avec le postulat d'Euclide"Par un point extérieur à une droite *D*, il passe une droite et une seule parallèle à *D*".

réduction, bref la *droite mathématique*, celle des *Éléments* d'Euclide ou celles du théorème de Thalès, la droite comme ensemble de points alignés, qui est aussi l'intersection de deux plans non parallèles (mathématiques eux aussi, bien sûr !). Celle que les algébristes ont caché derrière une équation pour remplacer les démonstrations géométriques par des calculs. Ces mêmes algébristes ont gradué les droites et ils ont mis des axes de coordonnées dans le plan et dans l'espace. Ils se sont même échappés de notre espace à trois dimensions qui nous si familier qu'on ne le remarque plus, ils ont inventé des dimensions supplémentaires et on chuchote dans les couloirs des universités qu'ils parlent même d'espace de dimension infinie. Mais restons raisonnables. Regardons ce qu'ils ont fait dans le plan : dans le plan muni d'un système d'axes de coordonnées, ils ont cherché à remplacer la propriété d'alignement par une relation algébrique sur les coordonnées des points concernés. Rappelez-vous "Soit la droite d'équation $y = ax + b$ …". Le travail de réactivation du sens de cette phrase et de retour à son évidence originaire serait certainement fort intéressant à faire à tous les niveaux d'enseignement, et même aussi, pourquoi pas, au cours de la formation des maîtres de mathématiques dans les IUFM. Qu'est-ce qui fait que j'ai la certitude absolue que les points du plan dont les coordonnées vérifient une équation de la forme $y = ax + b$ sont alignés sur une même droite ? Comment vais-je m'y prendre pour (re)trouver ce qui fonde cette certitude ? Je peux me soumettre à un argument d'autorité "le maître me l'a dit" (mais au fait, le maître, comment il a fait lui ? Son maître le lui a appris. Oui. Et qui l'a appris au maître du maître ? Son maître. D'accord, mais le premier maître, comment il a fait lui ?). Je peux aller chercher la vérité dans un livre (mais au fait celui qui a écrit le livre …) ; je peux (re)faire la démonstration mathématique à partir de la définition d'une droite ; je peux me livrer à des manipulations graphiques ; autant de moyens qui peuvent me rassurer sur la vérité de cette assertion, mais parmi tous ces moyens, quel est celui qui va me convaincre, moi, que c'est nécessairement une droite et que ça ne peut pas être autre chose. Comment puis-je faire l'expérience de cette nécessité ? Je me suis interrogée et j'ai interrogé mes co-chercheurs. J'ai l'intention d'interroger des élèves et des étudiants. Pour ma part, telle que je suis aujourd'hui, je reviens à une définition et à une démonstration mathématique, mais je constate chaque année que cela ne suffit pas aux élèves. Et si je leur accorde ce droit, que dois-je faire alors ? Comment créer les conditions qui leur permettent de faire l'expérience de cette nécessité, de l'éprouver. La nécessité en mathématique ne se raconte pas, elle s'éprouve, et c'est parce que j'en aurais fait au moins une fois l'expérience que je pourrai, dans d'autres situations, une autre fois, réactiver le sens de cette expérience originaire. Comme il n'est jamais trop tard pour bien faire, nous cherchons donc à fabriquer des situations où nos élèves pourront, si ça marche, s'ils le veulent bien (mais c'est aussi le travail du maître de les amener à cette position), si nous avons bien construit notre enseignement, bref si toutes les conditions sont remplies (mais justement quelles sont ces conditions ?) faire l'expérience de la nécessité en mathématiques.

III.2. Husserl et l'origine de la géométrie

J'ai parlé plus haut de réactivation d'un texte mais j'ai oublié de vous parler de l'*Origine de la Géométrie* selon Edmond H. Je reformule ici de façon très succinte ce que j'emprunte à ce travail.

Pour faire le lien entre le travail GECO et le travail CESAME, nous avons besoin de comprendre comment se fait le passage des connaissances subjectives (connaissances locales construites par un sujet faisant des mathématiques) vers la connaissance mathématique, indépendante de l'individu qui l'a produite, connaissance mathématique dont une des caractéristiques est l'autonomie (voir plus haut §II) ou, ce qui revient au même, l'objectivité (par opposition à la subjectivité du sujet qui la produit).

Cavaillès, dans son dernier écrit *Sur la logique et la théorie de la science*, reprend une question de Kant revu par Husserl (dans *Logique formelle et transcendantale* ? je n'en suis pas encore là dans mes lectures husserliennes) sous la forme :

Comment des objectivités idéales, qui naissent purement de notre activité subjective de jugement et de connaissance, et n'ont d'existence originale qu'en tant que manifestation de notre spontanéité dans notre champ de conscience, acquièrent-elles le sens et l'être d'objets, [qui existent] en soi relativement à la contingence des actes et des sujets ?

<u>Commentaire sur l'*Origine de la Géométrie* de Husserl</u> :

Quand Husserl parle de la géométrie, il en parle comme d'un cas exemplaire de la connaissance scientifique et de la scientificité. Il choisit de réfléchir sur la géométrie parce que la réduction à l'idéalité des objets y est déjà faite. Les objets géométriques (et donc aussi mathématiques) sont des objets idéaux. Husserl se propose de rendre compte de la genèse de l'objectivité absolue, c'est-à-dire idéale, du sens. Il veut raconter comment la subjectivité peut sortir de

soi pour rencontrer ou constituer l'objet idéal de la science.
Reprenons notre propos.
Je vais donc interpréter ce texte de Husserl à ma façon, pour rendre compte du passage des connaissances subjectives (champ de la psychologie) aux objets de savoir mathématiques (champ des mathématiques) pour faire un travail d'analyse et d'interprétation qui, lui, est dans le champ de la philosophie des sciences et de l'épistémologie.
Husserl dégage plusieurs étapes dans la constitution de l'objectivité.
1) Création d'un objet de savoir (du côté de l'auteur ou de l'inventeur). L'objet de savoir est ici un objet idéal qui est le modèle absolu de l'objet en général.
Premier mouvement : celui de la décontextualisation. Pour le sujet dans son flux temporel, le sens de l'objet doit être invariant dans le temps. Il y a un sujet en train d'élaborer un objet de savoir, connaissance de niveau I, définition, théorème ou démonstration. Cet individu évolue dans le déroulement de son flux temporel. L'objet mathématique élaboré par lui à l'instant t_1 doit être le même que celui qu'il réactivera pour lui-même aux instants t_2, …, t_n postérieurs.
Deuxième mouvement : celui de la dépersonnalisation, de la rencontre avec autrui et de l'intersubjectivité. Le sujet doit vérifier, au cours d'échanges avec les autres, que le sens de l'objet de savoir est le même pour lui et pour tous les sujets de sa cohumanité.
Troisième mouvement : celui de la détemporalisation. Le texte doit être transmis à ceux qui sont en dehors de sa sphère de communication orale et aux générations futures. L'inventeur va donc écrire un texte en veillant à ce qu'il soit suffisamment complet et précis pour qu'un autre sujet, ailleurs ou à une autre époque, puisse le réactiver conformément au sens originel que l'auteur y a inscrit. Et c'est dans ce passage à l'écrit que le "je" de l'auteur, le contexte, l'inscription dans le temps ou l'histoire[25] vont être abandonnés et que se fait le passage à l'objet mathématique idéal.
Ce projet et cette effectuation qui réussit se déroulent toutefois dans la seule subjectivité *de l'inventeur, et par la suite aussi, c'est exclusivement dans son espace spirituel, pourrait-on dire, que se tient le sens présent originaliter avec la totalité de son contenu. … Mais l'existence géométrique n'est pas existence psychique, elle n'est pas existence de quelque chose de personnel dans la sphère personnelle de la conscience ; elle est existence d'un être-là, objectivement pour "tout-le-monde" (pour le géomètre réel et possible ou pour quiconque comprend la géométrie). Bien mieux, elle a depuis sa proto-formation une existence spécifiquement supra-temporelle et accessible, comme nous en avons la certitude, à tous les hommes et en premier lieu aux mathématiciens réels et possibles de tous les peuples, de tous les siècles et ce sous toutes ses formes particulières. Et toutes les formes produites à nouveau par quiconque sur le fondement des formes prédonnées endossent aussitôt la même objectivité. Il s'agit là, nous le voyons, d'une objectivité "idéale"…. Le théorème de Pythagore, toute la géométrie n'existent qu'une seule fois si souvent et même en quelque langue qu'ils puissent être exprimés.*
2) Prise de connaissance et interprétation d'un objet de savoir (du côté du lecteur ou de l'utilisateur), réactivation d'un objet de savoir : Un autre sujet lira le texte (pour l'utiliser, le comprendre ou l'apprendre). Il va devoir sortir d'une attitude de lecteur passif pour devenir un lecteur actif et réactiver le texte afin de retrouver le sens originel qu'y a inscrit l'auteur. C'est là qu'il peut se donner les moyens de refaire l'expérience originelle de l'auteur et qu'il va pouvoir non seulement prendre connaissance du texte, mais aussi y remettre le sens que l'inventeur y a inscrit. Il va réactiver l'objet de savoir conformément à l'évidence originaire de l'inventeur. *Évidence ne veut absolument rien dire d'autre que la saisie d'un étant de la conscience dans son être-là, de façon originale et en personne*. Nous retrouvons ainsi, même si Husserl ne le dit pas (en écrivant ce texte, il avait une préoccupation de philosophe et non d'enseignant), mais c'est ce qui nous intéresse pour CESAME, l'identité de l'objet dans le double mouvement du flux temporel du sujet (élève) et de l'intersubjectivité (classe). Il y a alors recontextualisation, retemporalisation et repersonnalisation de l'objet de savoir par le sujet (construction des connaissances subjectives dans la tête du sujet). Retenons aussi que le travail du maître est de contextualiser et de personnaliser ce qui est à construire, puis lors de l'institutionnalisation, il faut recommencer à l'envers pour retrouver l'objet de savoir mathématique (objectif). Tous ces mouvements sont à étudier finement dans la problématique CESAME.
Notons que Husserl se permet même quelques conseils. Du côté de la production de l'objet de savoir (phase 1) : *Pour le texte mathématique écrit, il appartient aux fonctionnaires de la science de vérifier que ce qui est porté par eux à l'énonciation scientifique le soit "une fois pour toutes" et soit "indubitablement réactivable dans son sens authentique"*. En ce qui concerne l'institution scolaire, Husserl s'interroge déjà :

[25] Certains matheux de la CI2U ont contesté ce point.

Comment la tradition vivante de formation de sens des concepts élémentaires s'accomplit effectivement, nous le voyons dans l'enseignement élémentaire de la géométrie et dans ses manuels ; ce que nous y apprenons effectivement, c'est à savoir manier, à l'intérieur d'une méthodologie rigoureuse, des concepts et des propositions tout prêts. Manier dans une méthodologie rigoureuse des concepts tout prêts, c'est travailler en utilisant des objets de savoir prédonnés avec leurs couches de sens sédimentées (attitude du lecteur passif, selon Husserl), sans faire le travail de réactivation du sens. En effet les signes graphiques de l'écrit (et sans doute les mots énoncés) éveillent leurs signification courantes. Mais *ce qui est passivement éveillé doit être converti en retour dans l'activité correspondante : c'est la faculté de réactivation …. La compréhension passive de l'expression se distingue donc de sa mise en évidence par réactivation du sens.*

III.3. Le contexte

Bien, mais revenons sur terre, et plus précisément à Nice où je suis payée pour enseigner de l'algèbre à des étudiants. Qu'ont-ils à voir avec toutes ces élucubrations ?

D'abord qui sont-ils ? Ce sont des étudiants inscrits dans un DEUG scientifiques (MASS1, mathématiques appliquées aux sciences sociales, première année). Ils sont environ 90, répartis dans trois groupes de TD. Ils viennent essentiellement d'une Terminale S, un sur dix a passé un bac ES,. En plus des mathématiques, ils apprennent de l'économie et de l'informatique. Cette année, le DEUG MASS a dû entrer dans un tronc commun de six semaines, tronc commun à tous les DEUG scientifiques de Nice, et les contraintes liées à la gestion simultanée de 700 étudiants ne m'ont pas permis de travailler à ma guise pendant les six premières semaines. Le 16 novembre donc, je recommence l'enseignement avec les étudiants du MASS1 qui ont suivi le tronc commun et, puisque j'ai retrouvé ma liberté de professeur, je veux initialiser une nouvelle forme de travail en TD : pendant le TD, ce sont eux qui travaillent, moi je travaille avant et après. Pendant le TD, je suis la déesse aux mille bras, et à la fin, j'institutionnalise.

III. 4. Le but de l'expérimentation

Notons bien que lorsque Husserl parle de l'*Origine de la géométrie*, il parle de l'origine, non pas au sens d'origine historique, mais au sens d'originarité : ... *le sens total de la géométrie ne pouvait, dès le commencement, être déjà là comme projet et se poursuivre en un mouvement de remplissement. En tant qu'étape préliminaire, une formation de sens plus primitive avait nécessairement précédé, de telle sorte que, indubitablement, elle est apparue pour la première fois dans l'évidence d'une effectuation réussie.* Pouvons-nous faire retrouver aux étudiants une expérience originaire et créatrice de sens ? Pouvons-nous leur faire rencontrer un objet de savoir pour que sa connaissance en soit, pour chacun, incarnée ? Pouvons-nous la leur faire expériencer pour créer une expérience originelle fondatrice de sens, incarnée dans une évidence originaire ?

Quel a été notre but en préparant la première séance (TD de démarrage que je noterai TDd) ?

Nous avions déjà monté une expérimentation analogue, l'an dernier, dans une classe de Seconde de Catherine, autour des inéquations. Nous voulions reprendre le même travail dés le début de l'année en Terminale et en DEUG. Mais le tronc commun en a retardé la mise en route. Comme pour les secondes, nous avons préparé la séance de DEUG pour étudier comment nous pouvons faire vivre aux étudiants l'expérience de la nécessité et comment nous pouvons l'institutionnaliser. Ici les mots-clé sont : nécessité, autrui, institutionnalisation.

Je suis sûre que tous les étudiants qui arrivent en DEUG scientifique sont prêts à mettre leur tête à couper que "l'équation $y = ax + b$ ou l'équation $ax + by = c$[26] est l'équation d'une droite <u>dans un plan</u>". Cette connaissance fait partie de ce que nous appelons le *socle de base*. Ce sont les connaissances dont l'élève est absolument sûr, même s'il ne sait pas d'où elles viennent (par exemple la règle des signes, un carré est positif ou $\frac{a}{a}$ = 1 en Seconde). Le travail ne portera donc pas sur l'équation d'une droite dans le plan (nous ne sommes pas dans un séminaire expérientiel de psychophénoménologie, nous sommes dans une classe) mais sur la question suivante : que représente cette même équation quand nous sommes dans un espace à trois dimensions au lieu d'être dans le plan ? Pourquoi cette question ? Parce que nous sommes en mathématiques et que c'est le genre de questions que nous aimons bien nous poser. Les élèves et les étudiants, qui eux, ne sont pas des poseurs de questions professionnels, ont la fâcheuse manie d'oublier les trois derniers mots et de dire la même chose pour l'espace. Beaucoup (combien au fait ? voir plus loin) disent ou écrivent que "l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite" dans l'espace. Notez la place du dernier guillemet. Mais les objets mathématiques sont résistants, je vous l'ai expliqué, et malheureusement cette dernière phrase, vraie dans le plan, n'est pas vraie dans

[26] Je n'entre pas ici dans la question de la non identité de ces deux objets de savoir.

l'espace (elle n'est pas vraie pour moi, mais elle ne peut pas être vraie non plus pour les étudiants, cf III.2.). Dans l'espace, quoi qu'on y fasse (la règle démocratique n'est pas respectée et un sondage ou un vote ne donnera pas le bon résultat), $ax + by = c$, c'est l'équation d'une plan. Et cette erreur est une erreur qui révèle très certainement l'existence d'un obstacle épistémologique au sens de Bachelard (celui de la dualité). J'ai retrouvé les copies d'un partiel (du 3 02 97, ex III) : dans environ un tiers des copies, deux connaissances cohabitent, la connaissance locale ci-dessus "l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite dans l'espace" et la bonne connaissance "dans l'espace, un système de deux équations linéaires non proportionnelles est le système des équations d'une droite". C'est sur cette erreur que va donc porter le travail d'enseignement.

- Nous voulons faire bouger, ou au moins ébranler la connaissance locale "dans l'espace, une équation linéaire est l'équation d'une droite" et plus généralement pour les espaces de dimension n, l'association "une droite $\longleftrightarrow$ une équation". Il faut noter chez les étudiants l'absence de lien entre la "droite de l'espace" et "l'ensemble des solutions d'un système est une droite de R^n" et, plus précisément entre l'objet géométrique "droite de l'espace" et son écriture algébrique (un système d'équations de rang n-1 en dimension n) ("les mystères de la dualité sont cachés derrière" disent les mathématiciens).
- Nous avons constaté l'an dernier en seconde, que les élèves savaient qu'une inéquation ne pouvait pas avoir des solutions dépendantes de l'élève qui l'avait résolue, mais que l'ensemble des solutions d'une inéquation était constitutive de l'inéquation donnée. Nous sommes donc en droit de penser que, pour un étudiant de DEUG, un sous-ensemble de points ne peut pas être en même temps une droite et un plan (non contradiction).
- Il s'agit aussi de faire passer la possibilité de travailler dans les deux cadres (qui permet de changer de cadre pour résoudre un problème et aussi, c'est important pour les élèves, d'exercer un contrôle sur les résultats produits), le cadre géométrique et le cadre algébrique et la nécessité de trouver la même réponse dans les deux cadres. Il faut savoir identifier les résultats, c'est-à-dire être capable de voir ou de lire ou de comprendre que c'est le même résultat sous des apparences et des écritures différentes, bref, apprendre à reconnaître le même sous des emballages différents. Il y a des objets mathématiques (droites et plans mathématiques de l'espace) et, pour chacun, des écritures algébriques qui sont des systèmes d'équations de ce sous-espace (au sens de système de relations exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que les points de coordonnées *(x, y, z)* appartiennent au plan ou à la droite). Pour savoir si un point appartient à un plan ou à une droite donnés, " je vois sur le dessin ", " j'imagine dans ma tête " ou "je démontre" dans le cadre géométrique, ou "je calcule si les coordonnées vérifient les équations " dans le cadre algébrique. Nous construisons ainsi pour la suite une correspondance entre les sous-espaces et les systèmes d'équations linéaires. Attention, il y a une foule de choses attachées à l'objet mathématique : il y a ses représentations matérialisées, ses écritures symboliques, les représentations mentales qu'un sujet s'en construit, et sans doute bien d'autres choses qu'il faudra étudier finement et proprement.
- Les notions mathématiques qui sont derrière ce travail sont riches et consistantes.
- Nous pensons enfin que, pour éviter de construire l'algèbre linéaire sur du sable et sur du non-sens, il faut arriver à démolir cette connaissance locale qui ressortira plus tard dans l'année universitaire sous la forme "la dimension de l'espace solution d'un système d'équations linéaires de rang r est un sous-espace de dimension r de R^n" (au lieu de $n - r$) et donner du sens à cette proposition (la bonne!). D'où l'idée de faire vivre aux étudiants une expérience de référence, une expérience cruciale.

III.5. Une erreur indéracinable en première année de DEUG : la copie de Nadège et la double connaissance

Voici le texte de l'exercice III du partiel du 3 février 1997

Question III *(sur 4 points)*
L'espace est rapporté à un système de coordonnées (x, y, z). Soit le système (S)

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

1) Montrez que ce système est le système des équations d'une droite. Montrez que cette droite est parallèle à un plan de coordonnées. Lequel ?
2) Pouvez-vous fabriquer, et si c'est possible faites-le, un système d'équations de cette droite avec
  a) une seule équation ?

b) deux équations autres que celles de S ?
c) trois équations ?
3) Écrivez une représentation paramétrique de cette droite.

Une réponse parmi d'autres (nombreuses) : la copie de Nadège, une "bonne" étudiante
Je mets des commentaires en italiques.

1) (S) $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x-y+z=2 & (2) \end{cases}$

(1) et (2) sont les équations de deux plans.

Vérifions que ces deux plans ne sont pas parallèles : $\frac{1}{1} \quad \frac{1}{-1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2}$. Donc ces deux plans ne sont pas parallèles (ni confondus, ni parallèles distincts). Les deux plans n'étant pas parallèles : ils ne peuvent être que sécants : leurs "points communs" sont donc représentés par une <u>droite</u>. (on peut aussi montrer en échelonnant le système que l'ensemble des solutions est représenté par une droite : c'est-à-dire une infinité de solutions à un degré de liberté : la droite a pour équations

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x \qquad +2z=3 \end{cases}$$

(c'est juste, cela a été appris pendant le premier semestre et Nadège sait changer de cadre, c'est une expertise ; elle ne s'étale pas dans la solution algébrique, elle la signale en passant ce qui indique un souci de cohérence interne)

Droite : <u>$2x + 2z = 3$</u>

(c'est faux, c'est la connaissance locale))

On voit que la droite : $2x + 2z = 3$ n'est pas un plan dans l'espace car $y = 0$.

(pour la variable absente, voir IV. 2)

Donc dans l'espace : elle est parallèle au plan (0yy'). *(0yy' n'est pas un plan mais un axe de coordonnées, donc une droite)*

2) a) On peut donner l'équation de cette droite c'est-à-dire : $2x + 2z = 3$. *(c'est faux)*

b) Oui on peut prendre des équations proportionnelles à (1) et (2) :

$$\begin{cases} 2x+2y+z=1 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=2 \end{cases}$$

(c'est juste, mais ce n'est pas ce que j'attendais, mais je n'avais qu'à poser la question autrement)

c) Oui on peut prendre comme troisième équation une combinaison linéaire des deux premières

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$$ *(c'est juste, c'est bien, ce n'est pas expliqué)*

Dans cette réponse, deux connaissances cohabitent

1) la connaissance algébrique locale $ax + by = c$ est l'équation d'une droite dans l'espace, cette connaissance vient du collège (sous la forme $y = ax + b$) et elle est vraie dans le plan.

2) la connaissance issue de l'étude des systèmes d'équations linéaires : un système d'équations linéaires à trois inconnues, de rang 1 (c'est-à-dire formé de deux équations non proportionnelles) représente une droite, connaissance corroborée par la connaissance sensible dans l'espace géométrique, l'intersection de deux plans sécants est une droite.

Nadège a travaillé et a compris ce qui a été enseigné, mais la connaissance locale très forte, déstabilisée par le travail fait au premier semestre, est toujours là, et cohabite, sur deux lignes consécutives, avec la nouvelle connaissance, malgré la contradiction que l'étudiante serait bien capable de pointer au niveau conscient, car elle ne fait pas du Canada Dry mathématique, elle se soucie de sa cohérence interne (voir plus haut), elle contrôle ses résultats. Il est à noter que dans ce paquet de copies, au moins un tiers des copies présentent des réponses analogues (double connaissance).

C'est le problème qui est mis ici en évidence que nous voulons prendre à bras le corps assez tôt dans l'année, en faisant vivre une expérience aux étudiants, et nous cherchons à institutionnaliser autre chose que le simple objet de savoir : "dans un espace de dimension 3, l'équation $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan", d'autant plus que cela a déjà été enseigné au lycée et que les étudiants sont censés le savoir. Il faut que les étudiants reviennent à leur propre expérience de l'espace pour rencontrer l'évidence que ça ne peut pas être une droite, que c'est nécessairement un plan. Il nous faut donc trouver le moyen de faire passer les étudiants de la *compréhension passive* à la *mise en évidence par réactivation du sens.*

D'où l'enseignement que je vais décrire.

III.6. Le TD de démarrage

La consigne

Voici le texte de la consigne que j'ai distribuée aux trois groupes pour lancer le travail (après avoir vérifié que lorsque nous parlions de coordonnées dans l'espace, nous parlions tous de la même chose, et après avoir dessiné quelques points particuliers et vérifié que nos représentations sur le tableau et sur les feuilles étaient compatibles, même si nous ne dessinions pas les trois axes dans la même disposition spatiale, STOP : il y a déjà de la réduction dans l'air) :

On considère l'ensemble E_i des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation (i) pour i entier compris entre 1 et 5

(1) $2x - y = -1$

(2) $x = 3$

(3) $x + y + z = 1$

(4) $x^2 + y^2 = 1$

(5) $xy = 1$

Décrivez et représentez ces ensembles de points le plus précisément possible.

Toutes les méthodes de recherche et de résolution sont autorisées.
Écrivez les différentes étapes de votre recherche.
Donnez un résultat dont vous êtes le plus sûr possible. Expliquez ce qui vous a servi pour être sûr.
Pensez à la façon dont vous pouvez convaincre quelqu'un que votre résultat est exact.

Le déroulement

Le travail s'est fait suivant la chronologie suivante :

Dates	*Groupe concerné*	*Travail proposé*
17 novembre 1998 18 novembre 1998	*Groupe 3* Groupe 1 et 2	*20 mn de travail personnel et narration individuelle* *1 heure de confrontation et narration collective avec accord de tous les étudiants du petit groupe*
19 novembre 1998	*Groupe 1, 2 et 3*	*Synthèse : retour en grand groupe (de TD), vérification de l'accord et institutionnalisation de l'objet de savoir*
24 novembre 1998 25 novembre 1998	*Groupe 3* Groupe 1 et 2	*Lien avec la résolution des systèmes linéaires.* Travail sur le changement de cadres
25 novembre 1998	*amphi*	*Cours (droites et plans)*
14 décembre 1998	*amphi*	*Partiel (question III)*
16 décembre 1998	*amphi*	*Questionnaire*

Activité des élèves

La phase de travail individuel doit permettre, pour chacun, d'activer les connaissances locales, de se faire une opinion à partir de ses connaissances personnelles et, pour certains, de produire l'erreur attendue. Il ne s'agit pas ici de distinguer le bon grain de l'ivraie, et de clouer des étudiants au piloris, mais bien de faire apparaître un contradiction qui sera le moteur de la phase suivante. La production de l'erreur est un outil didactique.

La phase de travail en petit groupe (4 personnes) permet (1) de confronter les résultats et d'éliminer les résultats incorrects, (2) de faire l'expérience de la nécessité de trouver des plans et des surfaces et non des droites et des courbes, (3) de dialoguer avec des autruis par suite de l'obligation (qui est négociée avec les étudiants) de convaincre et de se mettre d'accord sur un compte-rendu collectif que chacun doit faire sien, c'est-à-dire pouvoir défendre devant le grand groupe, ce qui les obligent à thématiser, à verbaliser, à écrire.

La phase de synthèse en grand groupe, que j'ai conduite comme un feed-back de stage de formation, thématise les phases précédentes, amène les étudiants à rendre compte d'une expérience avec des mots, et ils ont été très attentifs aux échanges qui ont eu lieu, et permet au maître d'institutionnaliser ce que tout le

monde sait déjà maintenant. La phase suivante prend appui sur ce qui précède pour pointer le niveau II sur les connaissances acquises et ouvrir l'enseignement sur la problématique de l'algèbre linéaire.
Le cours est un cours classique qui apporte, après la phase expérientielle et l'évolution des connaissances de chacun, du savoir nouveau aux trois groupes réunis en amphi.
Le partiel reprend la question III du partiel de février 1997 (dont j'ai analysé les copies) pour comparer les réponses de février 1997 et celles de décembre 1998.
Le questionnaire (très ouvert) a deux fonctions : (1) côté recherche, il nous informe qualitativement sur les effets du dispositif, (2) côté didactique, c'est une situation de rappel pour les étudiants qui peuvent peut-être ainsi se remémorer ou évoquer ce qu'ils ont fait dans les séances du TDd. Les étudiants peuvent répondre anonymement ou non, selon leur choix. Voici le texte du questionnaire :

Les 17, 18 et 19 novembre, en TD, vous avez travaillé sur la description et la représentation de certains ensembles de points de l'espace : ensembles de points dont les coordonnées (x, y, z) *vérifient les relations* $2x - y = -1$; $x = 3$; $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 = 1$; $xy = 1$.
Vous avez travaillé d'abord individuellement, puis en petits groupes. Puis vous avez retravaillé ce sujet en grand groupe pour faire une synthèse.
Nous souhaitons savoir ce qui vous revient, au sujet de ces séances, quand vous prenez le temps d'y repenser.
----
1. Décrivez le ou les moments les plus importants pour vous pendant ces séances :
2. Décrivez votre comportement pendant ces séances (ce que vous avez fait, ce que vous avez dit, ce que vous avez pensé, ... ou autre) :
3. Qu'est ce que vous avez appris pendant ces séances ?
- sur les ensembles de points dans l'espace :
- sur les équations de droites et de plans dans l'espace :
Qu'avez-vous appris d'autre ?
4. Avez-vous utilisé personnellement depuis ces séances des choses apprises pendant ces séances ? Précisez.
5. Tout ce que vous avez envie de dire au sujet de ces séances et que nous ne vous avons pas demandé :

Nous avons aussi voulu obliger les élèves à faire un retour réflexif sur leur travail de deux façons : (1) c'est le rôle de l'accompagnement que j'ai fait pendant les séances en passant d'un groupe à l'autre pour demander un petit point d'information sur l'avancée du travail et en faisant expliciter certaines des phrases entendues. (2) c'est le rôle du passage à l'écrit dans la narration de recherche.
Mais comme je ne peux pas tout vous raconter, j'ai choisi de vous présenter trois phénomènes.

IV. Trois phénomènes

Dans la phase de travail personnel, mon travail consiste à regarder les réponses produites, pour repérer les réponses différentes et leurs auteurs, afin de constituer les petits groupes de la phase suivante autour de réponses contradictoires. Or TOUS LES ÉTUDIANTS (et oui, ils étaient 90 !) ont écrit que l'équation $2x - y = -1$ était l'équation d'une droite. Certains l'ont même dessinée. J'exagère un tout petit peu : certains étudiants (très peu) n'ont rien écrit. Mais pendant les dix premières minutes, dans le premier groupe où j'ai fait ce TDd, je n'ai pas vu une seule fois le mot "plan" pour qualifier E_1. Je me suis donc demandée si l'expérimentation n'allait pas tourner court faute de résistance et si je n'avais pas devant moi une troupe de passe-murailles des mathématiques. Le tronc commun ne m'avait pas permis de faire la connaissance de ces étudiants, bien que j'ai été leur professeur d'algèbre en amphi et en TD pendant six semaines. Dans un premier temps, je me suis dit "Ca ne marche pas !" et dans un deuxième temps "Mais ce n'est pas possible que ça ne marche pas ! Ca a marché en Seconde l'an dernier. L'analyse *a priori* est bien faite. Fais confiance à la théorie, ça ne vient pas comme c'est prévu, mais ça ne peut pas ne pas venir, laisse faire le travail à la situation préparée et tu verras bien. Tu as bien préparé ton truc, maintenant, laisse faire les maths !". Je dois dire que je suis quand même une enseignante sacrément privilégiée. Car la pensée de mes autruis co-chercheurs m'a aidée à avoir confiance dans la situation proposée. Je ne me sentais pas seule. Mais il y avait aussi l'apport du GREX dans cette confiance. Les Grexiens savent que les choses se passent comme prévu ou … autrement ! Nous avons appris à faire les choses en deux temps. D'abord accueillir ce qui se passe sans le juger, à recueillir les informations. Ensuite prévoir un second temps pour faire le travail de jugement, d'analyse et de recherche. Ce qui s'est passé en réalité, je ne l'ai pas vu pendant les séances du premier TDd, mais je l'ai compris, à partir des documents récoltés, en écrivant cet article : à la fin de la phase de travail personnel, certains étudiants ont retrouvé l'équation du plan apprise au lycée. Ces étudiants et les aller-retour entre les trois premières équations dans le travail en petits groupes ont fait exister le conflit dans presque tous les petits groupes, mais pas dans tous. C'est un défaut de cet enseignement, car nous avions noté l'an dernier, en Seconde, que dans les petits groupes où tous les élèves trouvaient le même résultat, donc sans conflit, les connaissances des élèves n'avaient pas bougé au cours de cette phase. Ce qui corrobore que c'est bien le conflit et le dépassement de la contradiction qui est le moteur (ou l'un des moteurs) de la réorganisation des connaissances des élèves. Pour les descriptions qui suivent, les données viennent de mes observations (mais je n'ai pas tout vu, car j'étais seule, pour la Seconde, l'an dernier, nous étions trois) et des document récoltés. Les narrations sont très pauvres et maladroites, nous l'avions prévu. Elles ont pourtant un rôle important. Bien que nous ne puissions pas les utiliser pour le travail de recherche, elles ont été, pour les étudiants, une aide à la réflexion et au retour sur soi.

IV.1. Comment la droite devient un plan et les courbes, des surfaces

Pendant le travail en petits groupes, les étudiants ont modifié leur connaissance (la première équation est une équation de plan, et non de droite). Souvent, un étudiant a acquis l'évidence apodictique (je ne sais pas si l'association des deux mots est correcte, je veux dire qu'il avait rencontré la conviction absolue, subjective et interne, que ce truc était forcément un plan).

Rodolphe a ramé comme un fou pour convaincre les autres. "Je suis sûr que c'est un plan *(je vérifie sa certitude par le critère de la tête à couper)* mais je n'ai pas les mots pour le dire". Il est passé par le dessin pour convaincre.

Lorinne a fait des gestes et elle a mis des mots sur ces gestes (vous savez comme les gens qui font un geste, toujours le même pour décrire un escalier en colimaçon ; s'ils parlent à un aveugle, ils diront "c'est un escalier qui tourne en montant" ou bien "c'est un escalier qui monte en tournant", mais entre cette formulation et "c'est une escalier qui a la forme d'une hélice circulaire droite", il y a un fossé (voir § IV.3). Lorinne a commencé à faire des gestes, puis elle m'a demandé si elle pouvait se déplacer. Elle est alors allée vers un coin de la salle, a installé ses axes sur les trois arêtes, Ox en bas à droite, Oy verticalement et Oz en bas à gauche. Elle a montré avec son avant-bras droit la position de la droite d'équation $2x - y = -1$ dans le plan xOy, a posé son bras le long de cette droite et a dit "Puisqu'on est dans l'espace, tous les points ont trois coordonnées, donc ma droite peut avancer" et du bras elle a balayé une surface plane perpendiculairement au dessin de la droite. "Et vous voyez bien que c'est un plan qui est parallèle à Oz". Et elle a recommencé autant de fois qu'il a fallu en répondant aux questions de son groupe qui n'a mis aucun empressement à se laisser convaincre, mais qui a fini par accepter l'évidence : Lorinne a raison, c'est bien un plan.

Laurent est passé par la deuxième équation, : "si on est sur une droite $x = 3$ est un point, si on est dans un plan, $x = 3$ est une droite, et donc, si on est dans l'espace $x = 3$ est un plan". (L'hyperplan est caché derrière cette découverte. Une équation linéaire pour un hyperplan). "Comme, dans $x = 3$, il n'y a pas de y et que, dans le plan, c'est quand même une droite, et pas un point, et que y peut prendre n'importe quelle valeur, forcément, dans l'espace, même s'il n'y a pas y et z, c'est un plan. Donc dans l'espace, $2x - y = -1$, où il n'y a pas z, z est quelconque, c'est aussi un plan" (ce discours est accompagné de dessins).

Edouard a explicité sa certitude par un discours accompagnée de gestes expliquant qu'il voyait les points "empilés" les uns sur les autres", "ça peut monter", "parce que z n'a pas de valeur".

*Céline verbalise tout de suite "il ne faut pas oublier z, on est dans l'espace, donc z prend n'importe quelle valeur. Un autre dit "z varie de - T à + T, donc on a une droite verticale et le plan est fait de ces droites verticales", ce qui amène nécessairement à dire que ce plan est parallèle à Oz.

Il est apparu clairement dans les feed-back (quand ils ont fait le récit de leur travail devant le grand groupe) que très souvent les étapes de travail ont été :

* $2x - y = -1$ est l'équation d'une droite
* $x = 3$ est l'équation d'un plan
* retour sur $2x - y = -1$, c'est aussi un plan
* $x + y + z = 1$, "je ne sais pas ce que c'est" ou "c'est un plan mais je ne sais pas le dessiner"

Les trois premiers cas étant réglés, les étudiants ont repris, sans aucune difficulté, le raisonnement gestuel pour $x^2 + y^2 = 1$ et pour $xy = 1$. Pour $x^2 + y^2 = 1$, ils ont dit que c'était un tube, un tuyau ou un empilement de cercles, ils l'ont dessiné, certains l'ont nommé cylindre. Pour $xy = 1$, tout est passé par des gestes, ou la manipulation de feuilles de papier. Sophie et Lorinne ont cherché un nom pour cette chose et ont dit "C'est un plan hyperbolique". Plus tard, elles ont renoncé au mot plan, parce que si on fait tourner les droites, elles sortent de la chose. Après la séance, Sophie a consulté une encyclopédie et nous a ramené le mot "quadrique" avec sa définition. Donc, pour les deux dernières équations, le mot "cylindre" n'est pas toujours venu, mais les objets ont été décrits ou dessinés.

Pendant le TDd, les étudiants n'ont pas su écrire ce qu'ils faisaient, parce qu'ils ne sont pas entraînés aux narrations de recherche, mais ils ont accepté de montrer avec leurs gestes et de dire avec leurs mots pour convaincre les autres et pour se mettre d'accord.

Je trouve quand même extraordinaire que, sauf Emilie, aucun ne m'a dit ou a dit pendant les synthèses qu'il se rappelait avoir vu l'équation d'un plan au lycée (ou dans le tronc commun, puisque je le leur avais déjà expliqué). Quand je l'ai dit, démontré et encadré, à la fin de la synthèse, en disant qu'il fallait le savoir, certains s'en sont rappelés, d'autres pas.

IV.2. Le sens de la variable absente

J'ai pu observé souvent qu'il y a une réelle difficulté à considérer $2x - y = -1$ ou $x = 3$ comme des équations à trois inconnues. En effet l'information n'est pas dans l'équation mais dans le contexte (en informatique, on dit qu'on déclare les variables). “Soit, dans un plan, l'équation $2x - y = -1$”. Droite, dit l'élève, et il a gagné. “Soit, dans l'espace, l'équation $2x - y = -1$”. Droite, dit encore l'élève, et il a perdu. J'ai longtemps pensé que les élèves ne faisaient pas attention au début de la phrase. Mais une autre explication a été donnée massivement dans les synthèses, explication donnée après que la connaissance ait bougé de la forme “il n'y a pas z dans l'équation, donc $z = 0$[27]” à “il n'y a pas z, donc, z est quelconque ou libre”. L'un d'eux conclut “finalement, moi je ne me tromperais pas si on écrivait l'équation $2x - y + 0z = -1$”. À l'avenir, je me servirai de ce détour pour convaincre.

Certains ont raisonné sur l'absence de z, comme Céline ou comme Laurent (voir §IV.2.). Laurent a écrit dans son questionnaire : “dans le plan, $x = 3$ n'est pas un plan mais une droite (parce que y n'est pas nul mais quelconque), de même j'ai pensé que $2x - y = -1$ n'était pas une droite mais un plan parce que z est quelconque”. Il me semble qu'il y aurait ici matière à explicitation (pour nos recherches). Cela ne correspond pas tout à fait à mon souvenir de la séance, Mais peu importe, pour lui c'est très bien car maintenant, il sait pourquoi il obtient un plan et non une droite avec l'équation $2x - y = -1$.

Les réponses aux questionnaires montrent que les étudiants ont réactivé eux-mêmes le sens de la variable absente. Absente, donc c'est le coefficient qui est nul et non la variable. Et quand le coefficient est nul, “la variable est quelconque, donc elle prend n'importe quelle valeur”, “elle peut varier de - T à + T”, ce qui se dit gestuellement dans “ça fait une droite est verticale et le plan est formé de toutes ses droites” ou “les points sont empilés les uns sur les autres” ou encore ”ça peut avancer”, “ça peut monter”. Savoir que la variable qui manque n'est pas absente, qu'elle est toujours là, mais qu'elle est neutralisée par un coefficient nul, leur sera utile pour comprendre correctement la défintion de la dépendance linéaire de n vecteurs. Philippe écrit dans le questionnaire (un mois après la séance) “Lorsqu'une variable n'est pas dans l'équation, cela ne veut pas dire qu'elle n'existe pas mais que c'est pour toute valeur de cette variable”. Je trouve aussi “J'ai cherché à me représenter les ensembles de points puis à généraliser (notamment voir que lorsque z n'apparaissait pas dans la relation, il prenait en fait toutes les valeurs de - T à + T)”. “Par exemple ici $x = 3$, on ne trouve pas de y et de z, cela ne veut pas dire qu'ils sont de coordonnées zéro, au contraire, ils sont quelconques”. Les choses ont bougé par rapport à ce qu'avait écrit un étudiant dans sa narration personnelle “Pas de z, donc E_1 est une droite dans le plan xOy”.

IV.3. Deux vitesses

Il faut noter un écart énorme entre le temps des étudiants et le temps universitaire, qui ne prévoit pas le temps de réactivation des formes de savoir, ou qui le renvoie dans le fameux travail personnel, mais alors nous, enseignants, nous ne prenons pas en compte le rôle de l'intersubjectivité dans la construction du sens de ces formes de savoir. Ce qui aurait dû “normalement” prendre quelques minutes, le temps de dire lentement en veillant à ce que tout le monde m'écoute bien et note sur sa feuille “Je vous rappelle que vous avez vu au lycée et dans le tronc commun que “dans un espace à trois dimensions, $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan”, mais faites bien attention, pour avoir une droite il faut au moins deux équations linéairement indépendantes parce que bla bla bla …”, ou même rester complètement implicite, puisqu'ils l'ont appris au lycée, ce qui aurait donc dû durer quelques minutes, nous a pris dans ce dispositif deux séances de TD d'1h30 chacune, sans compter le temps personnel, car vous savez tous que lorsque le travail de réflexion est sur orbite, on a du mal à l'arrêter. Une preuve ? Lisez le § suivant et voyez tout ce que Stéphane a fait tout seul.

IV.4. Le travail personnel et spontané de Stéphane

Stéphane a suivi l'enseignement en entier. Il a passé le partiel le 14 décembre et le jeudi 16 à la fin du TD, dernier TD avant les vacances de Noël, il vient me voir et me dit qu'il a un problème qu'il n'arrive pas à résoudre tout seul. J'ai beaucoup de mal à le suivre, je comprends qu'il pense s'être trompé dans l'exercice III du partiel, mais je n'arrive pas à avoir des informations qui me permettent de l'accompagner vers la résolution de son problème. C'est la veille des vacances, j'ai mille

[27] Cette erreur est dans la copie de Nadège.

choses à faire et je n'ai pas le temps de m'asseoir et de lui proposer un entretien d'explicitation. Je lui demande plusieurs fois quel est son problème, en vain bien sûr, il ne sait pas le dire et c'est ça le problème. Il est confus et confus de l'être. Je lui propose donc de prendre le temps d'y repenser tranquillement pendant les vacances, de m'apporter à la rentrée sa question écrite sur un papier et d'en reparler à la rentrée de janvier. Je lui précise bien sa tâche : "Lorsque ce problème sera résolu pour vous, vous pourrez alors mesurer tout ce que vous aura apporté le passage par l'écrit de la question. Surtout ne cherchez pas la réponse, écrivez seulement la question". Il est d'accord pour faire cette tâche. Pendant la première semaine de janvier (semaine où j'ai donné les notes du partiel sans rendre les copies et sans corriger, par manque de temps), je ne vois rien venir, et je ne demande rien. Pendant la deuxième semaine, mercredi 13 janvier, je donne les copies et un corrigé fait d'un montage de réponses d'étudiants. Nous faisons le point, Stéphane n'intervient pas. À la fin du TD, il vient avec une copie très propre. En haut à gauche, il a écrit son nom et le titre souligné en rouge est SYNTHÈSE. Nous avons travaillé un petit moment, puis je lui ai rendu son papier. Mais j'ai pensé le soir que j'aurais dû le garder et je le lui ai redemandé le lendemain. Il ne l'avait pas sur lui. Il l'a déposé à mon bureau vendredi. Je recopie le texte ici et j'indique en italiques les commentaires et la description des dessins.

SYNTHÈSE (souligné en rouge)

Dans une repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), soit le système (S) tel que

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Échelonnons le système (S)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \wedge & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \wedge & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \wedge & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \wedge & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 - e_1 \end{array}$$

(ceci est l'algorithme de Gauss pour la résolution des systèmes d'équations linéaires)

On arrive à $-2y = 1$ d'où $y = -\frac{1}{2}$ *(ici, il dit "on" comme dans les devoirs de mathématiques)*

Suit un dessin représentant une droite parallèle à Oz et passant par le point de coordonnées (0, $-\frac{1}{2}$, 0), tracée en rouge.

Nous avons tracé une droite $y = -\frac{1}{2}$. *(Ce résultat est faux, c'est la connaissance locale à démolir, et elle est encore là)*. Pourtant traçons dans le plan l'équation $x = 3$. *(il faut que je lui demande qui est "nous" qui n'est plus "on").*

Suit un dessin représentant une plan parallèle au plan yOz et passant par le point de coordonnées (3, 0, 0) hachuré en vert.

L'équation $x = 3$ a donné un plan car l'équation peut s'écrire $x + 0y + 0z = 3$ (équation d'un plan).

Or $y = -\frac{1}{2}$ peut s'écrire de la forme

$$0x - 2y + 0z = 1$$

(équation d'un plan en Terminale)

Le passage à l'écrit lui sert de moyen pour dialoguer avec lui-même, il est en dialogue interne et il utilise ce qui a été dit par un autre étudiant dans la synthèse).

Cependant pour $y = -\frac{1}{2}$, nous *(qui est "nous" ?)* avons tracé une droite alors que l'équation est celle d'un plan. Pourquoi ? (*"nous" risque d'être la connaissance locale dont j'ai parlée plus haut et elle s'oppose à celle que Stéphane a bien retenu et qu'il a énoncé "L'équation x = 3 a donné un plan car l'équation peut s'écrire x + 0y + 0z = 3 (équation d'un plan)")*

Solution proposée : *(souligné en rouge)*

- Un système de deux équations de plans donne obligatoirement une droite (intersection de 2 plans dans notre exemple) *(Il oublie de dire que les plans doivent ne pas être parallèles, mais cet oubli n'est pas important ici).*

- Une équation individuelle donne géométriquement un plan (variables y, z) pour par exemple $x = 3$ *(confirmation que Stéphane a appris quelque chose cette année).*

Qu'a fait Stéphane ? Il a repéré sa contradiction. Il sait qu'il faut la dépasser. Le travail de résolution provoque chez lui un grande confusion. Il y travaille seul. Il vient chercher mon aide. Après Noël, il a réussi à mettre son problème en mots, et en le faisant, il fait apparaître clairement qu'il a fait bouger ses connaissances, mais que la connaissance locale fausse est toujours là et le gène encore. Le problème n'est pas encore résolu. Il lui faut encore un peu de temps, puis il faudra conclure et faire en sorte qu'il bascule du bon côté et qu'il ne revienne pas à l'état d'équilibre antérieur.

V.Conclusion et pistes de travail (en vrac)

En premier lieu, ce qui est le plus important : que reste-t-il de ce travail pour les étudiants ? Je n'ai pas terminé le dépouillement des documents, mais je peux indiquer sommairement ce qui est saillant. D'abord cela les amène à une posture différente en TD (les TD normaux qui ont suivi, ce n'est pas tous les jours dimanche !) (ils sont plus actifs). Ce qui ressort à ce sujet dans les questionnaires est positif et il se dégage une demande pour d'autres TD comme celui qui a été décrit ici "À quand un TD du même type ?". Nous nous sommes tous fait plaisir et c'est déjà quelques chose. Les moments les plus importants pour eux sont massivement les moments de travail en petits groupes "le fait de se confronter les uns avec les autres" (nous l'avions déjà relevé l'an dernier en Seconde). Certains ont apprécié "le moment des débats oraux entre les différents camarades", les moments où il faut "convaincre l'autre". Le mode de travail permet aux étudiants "de faire le point avec des mots à nous", d'imaginer "Il a fallu s'imaginer ce que donne une équation dans l'espace, chose qu'on ne nous a jamais demandé de faire auparavant", de réfléchir en mathématiques sur un mode personnel "j'ai privilégié le travail "imagé" à une simple application de formules apprises au lycée. Par exemple, j'ai délaissé la formule "l'équation d'un plan est de la forme $ax + by + cz - d = 0$", et je me suis plutôt intéressée à une étude "imagée"" (il a quitté le cadre algébrique pour le cadre géométrique). Il y a de l'écoute, il y a de l'échange "chaque fois qu'on change de groupe, on trouve toujours quelque chose de nouveau". Ils ont appris : "J'ai remis en question certaines de mes connaissances", il y a du travail sur l'erreur. Certains ont rencontré l'évidence et vu l'importance de la certitude avant la formalisation de la démonstration. "Avec du recul et concertation avec les personnes de mon groupe, il m'a paru évident que $x = 3$ et $2x - y = -1$ étaient des plans. J'ai écouté les autres points de vue sur les questions et j'ai donné mon avis. (Je me suis rendu compte, qu'en travaillant à plusieurs, on arrivait presque toujours au résultat juste, même si au départ on avait tous donné une réponse fausse)".

Un dépouillement très sommaire, fait tout en corrigeant les copies du partiel, montre que seulement quelques étudiants produisent encore la double connaissances (pour un partiel de décembre, alors que l'épreuve de 1997 était en février) et que la plupart de ceux qui ont rendu des copies significatives ont su répondre correctement à la question 2)a).

Une question : Est-ce que ce qui s'est passé pendant le TDd et ce que je raconte a quelque chose à voir avec ce qu'a écrit Pierre dans le premier épisode du grand feuilleton (dont j'attends impatiemment le troisième épisode) *Introspection expérimentale et phénoménologie* (Expliciter numéro 26, page 24, bas de la col 2) : *il existe une distance infranchissable entre la pensée et ses produits, entre la pensée comme activité et les pensées comme produit de cette activité. Autrement dit, les pensées une fois nées, une fois exprimées, écrites, sont étrangères dans leurs propriétés à l'activité de penser.* Je ne recopie pas la suite, vous avez tous à portée de main la collection complète de Expliciter ! Si la pensée peut se prêter à n'importe quel jeu de règles, pourquoi pas aux règles du jeu mathématique. Mais si les mots (ou autre chose) des mathématiques ne sont pas disponibles, comment rendre compte des produits d'une pensée mathématique qu'ils étaient obligés de rencontrer dans le dispositif décrit ?

Je retiens aussi l'idée que le travail de réactivation d'un texte (construction du sens à partir du texte écrit ou oral) est considéré souvent comme du *travail personnel* pour l'étudiant, qu'il est implicitement laissé à sa charge. Nous pensons que ce travail doit être ramené au sein de l'institution scolaire, et par suite être l'objet d'une institutionnalisation. Je pense que ce travail personnel ne peut pas porter uniquement sur les connaissances de niveau I, sinon il suffirait d'apprendre par cœur le texte du savoir (c'est-à-dire ce que je dois savoir), mais sur les connaissances de niveau > I, et qu'il est de nature expérientielle (c'est-à-dire comment je dois le savoir, quel est mon rapport à ce savoir et quels sont les principes sous-jacents à cette activité mathématique).

Par exemple comment enseigner le changement de regard ? le transmettre ? l'expériencer ? D'où l'importance dès l'entrée en classe de l'accompagnement vers un regard tourné vers soi, vers un passage à l'attitude du mathématicien, différente de l'attitude naturelle, et plus précisément à l'attitude de l'algébriste et cela ne se fait pas tout seul. Les étudiants arrivent dans l'attitude naturelle. Si j'ai en tête de faire cet accompagnement, il faudra faire passer le monde naturel en arrière-plan et aider les étudiants à diriger leur attention vers le monde des idéalités mathématiques (ce serait la conversion algébriste !).

J'ai commencé à déplier les couches de sens sédimentées dans les savoirs de l'algèbre linéaire, et c'est d'une grande complexité, ce qui montre que si les étudiants ont du mal à comprendre l'algèbre linéaire dont l'apparence est d'une simplicité qui touche à l'esthétisme, ils ont de bonnes raisons ; si nous regardons avec soin tous les points de vue entretissés, nous comprenons pourquoi l'algèbre linéaire est difficile à enseigner et à apprendre. C'est la même chose pour le cube mathématique et la géométrie du collège. Comment un collégien va-t-il faire, ou ne pas faire, la réduction de tous les cubes matérialisés et représentés qu'il rencontre, au cube mathématique, objet idéal pur. J'ai commencé ce travail et ce n'est pas simple ni à faire, ni à expliquer. Ce sont bien des exemples de complexité au sens phénoménologique.

Ce que j'explique ici vous paraît peut-être compliqué, ça l'est. Cherchez autour de vous des situations que vous maîtrisez parfaitement dans leur complexité et faites le même travail. Et vous comprendrez à quel point est rude le métier d'élève et comment est forte la pression adaptative pour échapper à ce qui risquerait de trop leur prendre la tête. Voyez les vacances de Noël qu'a dû passer Stéphane !

À ce sujet, il apparaît, dans les § IV.1. et IV.2., que la contrainte à communiquer avec autrui à propos d'un désaccord où personne ne peut imposer son avis et où seule la résistance des objets mathématiques permet de valider le vrai, permet au sujet de réorganiser ses connaissances et l'amène à accepter de passer par une verbalisation et une écriture que je qualifierai d'*espace intermédiaire*, entre le vécu personnel de l'évidence apodictique (pour nous, *compréhension*) ou l'accord avec le groupe social (pour nous, *conformité*) (côté sujet), et la nécessité épistémique d'un énoncé mathématique (côté mathématiques).

Une autre question : Tous les groupes ont eu des difficultés à faire le rapport collectif écrit alors que les explications ont été reprises dans les feed-back clairement et simplement (j'ai dû bien remplir mon rôle de médiation entre leur pensée et les mots pour la décrire). Ils ont ensuite accepté ma mise en mots mathématique que j'ai écrite au tableau et les résultats du partiel prouvent qu'ils ont compris … et retenu. On pourrait donc dire que, pour un problème difficile, un étudiant ne peut pas passer directement du travail de la pensée au texte mathématique. Le saut est trop grand. Alors, peut-être, préfèrent-ils dire qu'ils ne savent pas, plutôt que de nous livrer un discours dont il savent bien qu'il ne respectent pas les canons de l'écriture mathématique (problème de contrat). Je sais, je me vautre dans le psychologisme. Mais ne pourrions-nous pas regarder ce phénomène autrement ?, Ce qu'ils ont trouvé et rencontré ne peut pas s'écrire tel quel si leur intention est d'écrire des mathématiques, il faut une transformation (laquelle ? comment ?) qui est beaucoup plus qu'une mise en mots. L'objet mathématique donne lieu à une représentation mentale, mais il manque la représentation mentale de l'écriture formalisée qui est aussi un objet mathématique dans le cas de l'algèbre. Ce point est à travailler.

Le récit ou la narration pourrait aider à conscientiser une expérience (vécu de référence) (en dehors d'une situation d'entretien) afin qu'elle devienne un *événement didactique* (un vécu thématisé) auquel l'étudiant pourrait se référer plus tard. L'écrit (mais quel écrit ? le même ou de même nature que celui que nous avons commencé à utiliser à Saint-Eble) jouerait le rôle d'"intermédiaire" pour et avant le passage au discours mathématique, entre le moment de l'évidence (remplissement intuitif, expérience, vécu) et le moment de l'écrit mathématique (il faudra regarder quelles seraient ses fontions). La phase intersubjective en petits groupes serait donc un espace médiateur entre le sujet et les mathématiques, ce qui pourrait apporter des arguments à l'une de nos hypothèses de travail :

La construction des connaissances mathématiques est d'essence intersubjective.

Husserl dit dans l'*Origine de la géométrie* :

Dans la connexion de la compréhension mutuelle par le langage, la production originaire et le produit d'un seul sujet peuvent être re-compris activement *par les autres.*

K incarnée → thématisation en petits groupes → parole et écriture naturelle en petits groupes après accord → feed-back et synthèse en grand groupe → texte mathématique institutionnalisé par le maître.

Mais, est-ce que nous ne sautons pas une étape ? Ces questions sur le rôle de l'écrit et du récit, que nous aborderons dans la deuxième partie du projet CESAME, mériteraient d'être éclairées par quelques entretiens d'explicitation. Comment ont-ils fait les étudiants avec leurs équations pour rencontrer ce qui leur a été donné à titre d'évidence première et donc apodictique, c'est-à-dire nécessaire subjectivement ? Ils n'ont pas fait le retour à l'origine du sens puisqu'ils sont partis déjà d'une couche de sens sédimentés qui est le sens de l'équation d'une droite et de la droite géométrique (le *socle dur*, ce dont les étudiants sont sûrs, absolument sûrs (voir entretiens faire-faux)). A partir de là, le fait que l'on a un plan est devenu une évidence pour certains, une évidence ante-prédicative ("je n'ai pas les mots pour le dire" ont dit plusieurs d'entre eux), le corps le sait, mais ça ne passe pas encore par le langage. Pas pour tous. J.T. Desanti dit (dans *Les philosophes et les mathématiques*) : *Donc deux pôles : le premier fait signe vers les syntaxes strictes, le second fait signe vers ce que Husserl a toujours appelé le pré-objectif, l'anté-prédicatif, ce qui précède la logique, ce sans quoi la logique ne pourrait même pas apparaître, ce qui dans l'expérience, dans le perçu, dans l'expérience propre du corps, concerne au plus près le monde, le vécu, dans son déploiement dans la sphère phénoménologique, en tant que ce déploiement est saisi. Alors que faire ? Où sont les mathématiques ?*

En effet, où sont les mathématiques dans toute cette histoire ?
À suivre …

11	**7**	**8**
4	**21**	**6**
9	**15**	**2**

Proposez à la personne qu'elle apprenne par cœur la grille de chiffre, pendant qu'elle le fait observez les traces et les observables de son activité,
- attendez que la personne vous dise qu'elle a finit, puis demandez lui de vous réciter la grille. Une fois cela fait, demandez les diagonales et observez comment elle s'y prend pour vous les donner.
Puis faites expliciter le détail de la manière d'apprendre cette grille, y compris le tout début (qu'est-ce qui a fait qu'elle a procédé de cette manière ?) et le critère de fin. (Comment savait-elle qu'elle savait ?)